Γραμμική Άλγεβρα Ι

Φροντιστηριακές ασκήσεις #1. Πράξεις πινάκων.

1. Δείξτε ότι για κάθε $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ισχύει ότι
$$2(A - B + 3C) + 3(2A + 6B - 6C) - 4(2A + 4B - 3C) = \mathbb{O}_{m\times n}.$$

2. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, και $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Να υπολογίσετε, όταν ορίζονται, τα γινόμενα AB, BA, BC, CB, ABC.

3. Έστω
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Να δείξετε ότι $A^2 = A$, $B^3 = \mathbb{O}_{3\times 3}$, ο C αντιστρέφεται και $C^{-1} = C$.

4. Να βρείτε τον αντίστροφο του $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ και τον πίνακα $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ώστε
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. Να υπολογίσετε όλους τους 2×2 πίνακες που μετατίθενται με τον πίνακα
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Αν
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
να δείξετε ότι $A^4 = I_3$ και να βρείτε τον αντίστροφο του A. Βρείτε και τον πίνακα A^{2015}.

7. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας τέτοιος ώστε $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = \mathbb{O}_{n\times n}$. Δείξτε ότι A αντιστρέψιμος και $A^{-1} = -A^4$.

8. Να βρείτε έναν 2×2 πίνακα A έτσι ώστε: $A^2 = A$ με $A \neq \mathbb{O}_{2\times 2}$ και $A \neq I_2$. Βρείτε και έναν δεύτερο πίνακα B με τις ίδιες ιδιότητες.

9. Έστω A, B και $A + B$ αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες. Δείξτε ότι και ο $A^{-1} + B^{-1}$ είναι επίσης αντιστρέψιμος και
$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B.$$